

# NIVA – RAPPORT

Norsk institutt for vannforskning  NIVA

Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Forskningsråd

Postadresse: Brekke 23 52 80  
Postboks 333, Blindern Gaustadalleen 46 69 60  
Oslo 3 Kjeller 71 47 59

Rapportnummer: 0-81018
Undernummer: -
Løpenummer: 1454
Begrenset distribusjon:

Rapportens tittel: Lineær programmering til kostnadsoptimalisering av tiltak mot forureiningar.	Dato: 13. januar 1983
	Prosjektnummer: 0-81018
Forfatter(e):  Kjell Øren	Faggruppe: Miljøteknikk
	Geografisk område:
	Antall sider (inkl. bilag):

Oppdragsgiver: Universitetet i Oslo, Institutt for Geofysikk	Oppdragsg. ref. (evt. NTNf-nr.): NHK-prosjekt
---	--


Ekstrakt:

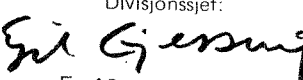
Tiltak mot forureiningar kan settast inn på fleire frontar: Kommunale leidningsanlegg og reinseanlegg, avrenning frå landbruket, avløp frå industri m.m. Vi ønskjer finna den samansettinga av tiltak i heile vassdraget som oppfyller våre kvalitetsmål til lægst mogeleg kostnad - ei kostnadsoptimal løysing. Rapporten skildrar bruk av deterministisk, lineær programmering til dette føremålet. To enkle døme syner praktisk bruk av verktøyet. Eitt av døma er knytta til Numedalslågen.

Generelt
1. Lineær programmering
2. Vannkvalitet
3. Kostnadsoptimalisering
4. Forurensningstilførsler
Numedalslågen

4 emneord, engelske:
1. Linear programming
2. Water quality
3. Cost optimization
4. Amounts of pollutants

Prosjektleder  
  
Kjell Øren

For administrasjonen:  
  
John Erik Samdal

Divisjonssjef:  
  
Egil Gjessing

ISBN 82-577-0585-3

  
Lars Overrein

## F Ø R E O R D

I januar 1981 starta Institutt for geofysikk ved Universitetet i Oslo prosjektet "Simuleringsmetoder, vannressurser", finansiert av Norsk hydrologisk komite.

I brev av 13.2.1981 fekk NIVA førespurnad frå professor Bo Wingård om å delta i prosjektet innanfor ei økonomisk råde på kr 37 000.- for kvart av åra 1981 og 1982.

Frå NIVA er det underskrivne som har delteke. I 1981 bestod innsatsen hovudsakleg i deltaking i kollokvier. I 1982 har det også vore kollokvier, men NIVA har i tillegg arbeidd med bruk av lineær programmering til kostnadsoptimalisering av tiltak mot forureining.

Universitetet har nytta Numedalslågen som eit praktiske og konkret utgangspunkt for modellarbeidet. Difor er dette vassdraget nytta som eitt av døma i rapporten.

Vi takkar siv.ing. Arne Carlsen, cand.real. Nils Roar Sælthun og professor Bo Wingård for godt samarbeid og inspirerende fellesskap.

Oslo, 13. januar 1983

  
Kjell Øren

# I N N H A L D S L I S T E

	Side:
FØREORD	
1. INNLEIING	1
1.1 Kostnad/nytte	1
1.2 Bruk av lineær programmering i vasskvalitets- vurderingar.	1
2. LP-MODELL FOR OKSYGEN I ELVAR	2
2.1 Likningar for prosessane	2
2.1.1 Ideell blanding	3
2.1.2 Prosesser mellom tilførslepunkta	4
2.1.3 Ordning av likningar	5
2.1.4 Oppsummering av prosesslikningar	6
2.2 Målformulering	7
2.3 Døme på oksygenmodell	8
2.3.1 Problemstilling	8
2.3.2 Gitte data	9
2.3.3 Problemformulering	9
2.3.4 Resultat	9
2.3.5 Sensitivitet	18
3. LP-MODELL FOR FOSFOR I ELVAR	18
3.0 Generelt atterhald	18
3.1 Likningar for prosessane	19
3.1.1 Ideell blanding	20
3.1.2 Prosessar mellom tilførslepunkta	22
3.1.2.1 Fosfat	22
3.1.2.2 Partikulært fosfor	24
3.1.3 Oppsummering av prosesslikningar	25
3.2 Målformulering	25
4. ENKEL LP-MODELL FOR TOTALT FOSFOR I NUMEDALSLÅGEN	26
4.1 Problemstilling	26
4.2 Datagrunnlag	27
4.2.1 Generelt	27
4.2.2 Fordeling av vassmengder	27
4.2.3 Fordeling av foureiningstilførsler	29
4.2.4 Kostnadstal for reinsing av kommunalt avløp	30
4.3 Problemformulering	32
4.4 Resultat	33
5. OPPSUMMERING	38
6. LITTERATUR	39
7. VEDLEGG	40

## 1. INNLEIING

### 1.1 Kostnad/nytte

Tiltak mot forureiningar kan settast inn på fleire frontar: Kommunale leidningsanlegg og reinseanlegg, avrenning frå landbruket, avløp frå industri m.m.

Vi ønskjer finna den samansettinga av tiltak i heile vassdraget som oppfyller våre kvalitetsmål til lægst mogeleg kostnad - ei kostnadsoptimal løysing.

Fleire teknikkar har vore nytta til dette, m.a. lineær og dynamisk programmering. Føremålet med denne rapporten er å syna enkel bruk av lineær programmering (LP) ved vurdering av tiltak mot forureining. Vi bruker kun deterministiske modellar.

### 1.2 Bruk av lineær programmering i vasskvalitetsvurderingar

Omgrepet vasskvalitet omfattar m.a. to viktige problemstillingar:

- hygiene
- saprobiering/eutrofiering.

Ein viktig føresetnad for bruk av optimaliseringsteknikkar er at prosessane som skjer i vassdraget kan skildrast med matematiske uttrykk.

Hygienisk utilfredsstillande tilhøve blir oftast registrert ved førekomst av bakteriar som direkte stammar frå menneske eller dyr. Forsøk på modellering av slike hygieneparametrar, m.a. i USA, har synt at det er vanskeleg å verifisera og bruka resultata i praktiske arbeid. For hygieneføremål er det heller ikkje nødvendig med slik modellering, sidan det helst er snakk om ei enten/eller vurdering. Helsestyresmaktene sine vurderingar er sentrale. Ein må gjennomføra direkte lokalisering av utslipp av slike uønskte komponentar, og gjennomføra tiltak direkte retta mot desse.

Saprobiering/eutrofitilstandar i eit vassdrag utviklast ved tilstrekkeleg tilgang på næringsemne, dersom prosessane får tid nok i dei ulike vassdragsavsnitt. Tilførsler av fosfor, nitrogen og lett nedbrytbart organisk stoff kan føra til slike tilstandar.

Vi merkar oss at omlag alt rapportert arbeid i utlandet har vore konsentrert om utslepp og nedbryting av organisk stoff, dvs. oksygenmodellar. Dette kan ha fleire årsaker:

- oksygensvikt er i einstilte vassdrag eit reelt og dominerande problem
- for oksygen finst enkle matematiske uttrykk som held godt for praktiske føremål.

Jamnt over er oksygenproblemet i elvar lite i Noreg, grunna kraftig turbulens og relativt store vassmengder. Konsentrerte utslepp av lett nedbrytbart organisk materiale kan forårsake begroingsproblem, men sjeldnare oksygensvikt.

Her til lands har ein vore mest oppteken av tilførsler av fosfor og nitrogen, som aukar potensialet for biologisk produksjon og kan føra til eutrofiering. Ein vanleg måte å handsame slike problem på i Noreg i dag, er gjennom fosforkontroll. Problemstillinga er den same som for organisk stoff, skilnaden går på omsettingsprosessane.

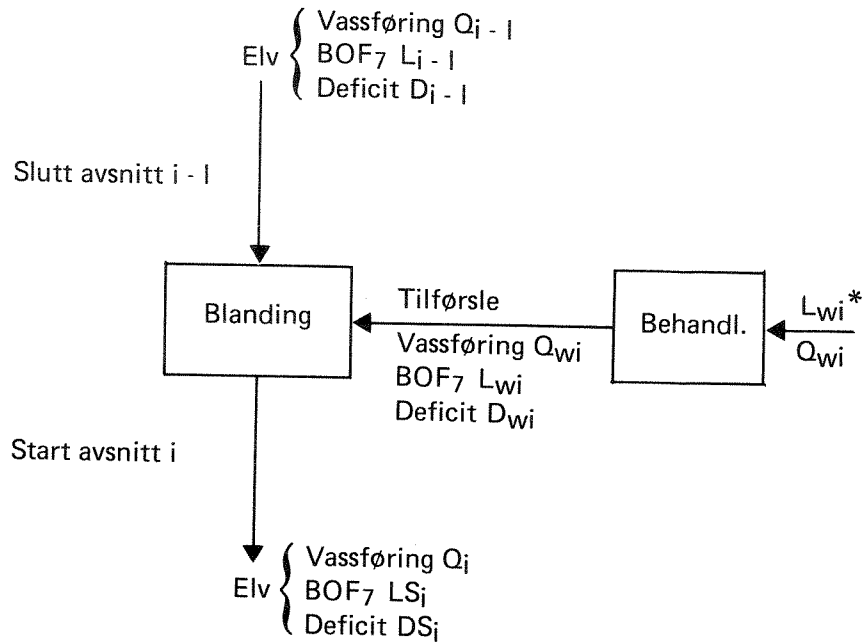
Det grunnleggjande utgangspunktet for vurderingane som følgjer finn ein i artikkelen "Linear Programming Applied to Water Quality Management", av ReVelle, Loucks og Lynn (1).

## LP - MODELL FOR OKSYGEN I ELVAR

### 2.1 Likningar for prosessane

Vassdraget er inndelt i avsnitt. I starten på kvart elveavsnitt, føreset vi ideell blanding mellom tilførsler og elvevatn. Likeeins føreset ein same temperatur på lokale tilførsler og elv.

### 2.1.1 Ideell blanding



Figur 1. Aktuelle strømar i blandeprosessen.

Massebalansar:

$$(2.1) \quad Q_i = Q_{i-1} + Q_{wi}$$

$$(2.2) \quad LS_i = \frac{Q_{wi} \cdot L_{wi} + Q_{i-1} \cdot L_{i-1}}{Q_i}$$

$$(2.3) \quad DS_i = \frac{Q_{wi} \cdot D_{wi} + Q_{i-1} \cdot D_{i-1}}{Q_i}$$

der  $Q_{i-1}$  = vassføring rett oppstrøms tilførslepunktet ( $m^3/s$ )

$Q_{wi}$  = vassføring på lokal tilførsle ( $m^3/s$ )

$Q_i$  = vassføring rett nedstrøms tilførslepunktet ( $m^3/s$ )

$L_{i-1}$  = BOF<sub>7</sub>-konsentrasjonen i elva rett oppstrøms tilførslepunktet (mg O<sub>2</sub>/l)

$L_{wi}$  = BOF<sub>7</sub>-konsentrasjonen i tilførslevatnet (mg O<sub>2</sub>/l)

$LS_i$  = BOF<sub>7</sub>-konsentrasjonen i elva rett nedstrøms tilførslepunktet. (mg O<sub>2</sub>/l).

$D_{i-1}$  = Oksygen-"deficit" rett oppstrøms tilførslepunktet (mg O<sub>2</sub>/l) (dvs. skilnad mellom O<sub>2</sub>-kons. med metta vatn, og aktuell O<sub>2</sub>- konsentrasjon).

$D_{wi}$  = oksygen-deficit på lokal tilførsle (mg O<sub>2</sub>/l)

$DS_i$  = oksygen-deficit rett nedstrøms tilførslepunktet (mg O<sub>2</sub>/l).

### 2.1.2 Prosessar mellom tilførslepunkta

Mellom tilførslepunkta skjer det reaksjonar. For oksygen nyttar ein likningane til Streeter og Phelps (2), og finn følgjande verdier ved slutten av elveavsnitt i:

$$(2.4) \quad L_i = LS_i \cdot e^{-k_1 t_i}$$

$$(2.5) \quad D_i = \frac{k_1}{k_2 - k_1} \cdot \left[ e^{-k_1 t_i} - e^{-k_2 t_i} \right] \cdot LS_i + DS_i \cdot e^{-k_2 t_i}$$

der  $t_i$  = opphaldstid i elvavsnittet frå knutepunktet i til  $i + 1$

$k_1$  = koeffisient, nedbrytingsprosessar

$k_2$  = koeffisient, reoksygenering

I desse likningane ligg det ingen kontroll av at opphaldstida  $t_i < t_c$ , dvs. den opphaldstida som gjev minimum oksygenkonsentrasjon. Den kontrollen utfører ein etter at utrekningane er gjort.

### 2.1.3 Ordning\_av\_likningar

Likningane (2.1) - (2.5) kan nyttast til å formulera LP-problemet på litt meir tenleg form.

Likning (2.3) kan skrivast

$$(2.6) \quad DS_i = \alpha_i \cdot D_{wi} + \beta_i \cdot D_{i-1}$$

der  $\alpha_i = Q_{wi}/Q_i$

$$\beta_i = Q_{i-1}/Q_i$$

Likning(2.2) kan uttrykkjast som

$$(2.7) \quad LS_i = \alpha_i \cdot L_{wi} + \beta_i \cdot L_{i-1}$$

$$(2.8) \quad LS_i = \alpha_i \cdot (1 - \epsilon_i) \cdot L_{wi}^* + \beta_i \cdot L_{i-1}$$

Der  $L_{wi}^*$  = BOF<sub>7</sub>-konsentrasjonen i ubehandla tilførsle i knutepunkt i (mg O<sub>2</sub>/l).

$\epsilon_i$  = reinsegrad for tilførsle i knutepunktet i, uttrykt i relativ storleik (0 til 1).

Kombinasjon av likning (2.4) og (2.8) gjev

$$(2.9) \quad L_i = (\alpha_i \cdot (1 - \epsilon_i) \cdot L_{wi}^* + \beta_i \cdot L_{i-1}) \cdot h_i$$

der  $h_i = e^{-k_1 t_i}$

eller utskrive

$$(2.10) \quad L_i = \alpha_i \cdot h_i \cdot (1 - \epsilon_i) \cdot L_{wi}^* + \beta_i \cdot h_i \cdot L_{i-1}$$



Likning (2.5) kan uttrykkjast som

$$(2.11) \quad D_i = f_i \cdot LS_i + g_i \cdot DS_i$$

$$\text{der } f_i = \left( \frac{k_1}{k_2 - k_1} \right) \cdot (e^{-k_1 t_i} - e^{-k_2 t_i})$$

$$g_i = e^{-k_2 t_i}$$

Kombinasjon av likning (2.8) og (2.11):

(2.12)

$$D_i = f_i \cdot \alpha_i \cdot (1 - \epsilon_i) L_{wi}^* + f_i \cdot \beta_i \cdot L_{i-1} + g_i \cdot DS_i$$

#### 2.1.4 Oppsummering - prosesslikningar

Problemet er no formulert i desse likningane:

$$(2.6) \quad DS_i = \alpha_i \cdot D_{wi} + \beta_i \cdot D_{i-1}$$

$$(2.12) \quad D_i = f_i \cdot \alpha_i (1 - \epsilon_i) L_{wi}^* + f_i \cdot \beta_i L_{i-1} + g_i \cdot DS_i$$

$$(2.10) \quad L_i = \alpha_i \cdot h_i (1 - \epsilon_i) L_{wi}^* + \beta_i \cdot h_i \cdot L_{i-1}$$

med følgjande konstantar:

$$\alpha_i = \frac{Q_{wi}}{Q_i}$$

$$g_i = e^{-k_2 t_i}$$

$$\beta_i = \frac{Q_{i-1}}{Q_i}$$

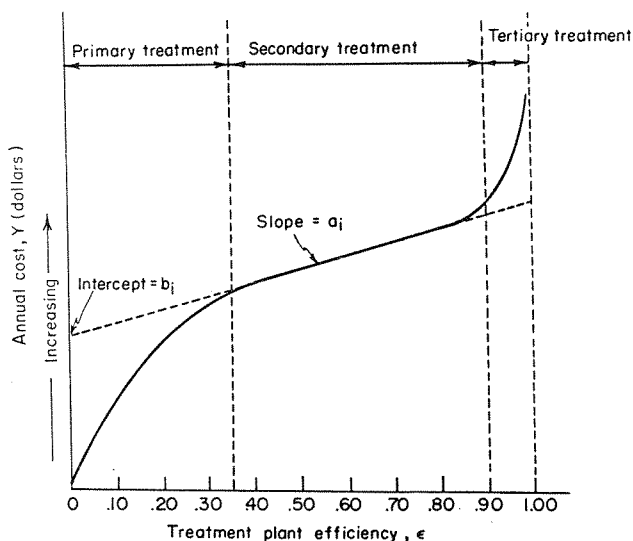
$$h_i = e^{-k_1 t_i}$$

$$f_i = \left( \frac{k_1}{k_2 - k_1} \right) \cdot (h_i - g_i)$$

## 2.2 Målformulering

Målet er å minimalisera reinsekostnaden for å oppnå gitte krav til vasskvaliteten.

Typiske kostnadskurver for reinseanlegg finn ein i litteraturen rapportert som i figur 2.



Figur 2. Kostnadskurve (etter (1)).

Kurver av dette slaget kan stykkevis lineariserast, slik at kostnaden for deler av kurven kan uttrykkjast

$$(2.13) \quad \text{COST}_i = a_i \epsilon_i + b_i$$

der  $\text{COST}_i$  = årskostnad for reinseanlegg  $i$   
 $\epsilon_i$  = reinsegrad (fraksjon 0-1) for anlegg  $i$   
 $a_i$  = kostnad pr. reinseeining  
 $b_i$  = skjæringspunktet mellom kostnadsline og kostnadsaksen.

Føresetnaden om lineær reinsekostnad er sentral. Vanlege reinseprosessar gjev reinsegrader som best kan framstillast i trinn som t.d. 10 %, 15 %, 85 % og 95 %, og for kvar av desse kan vi få fram kostnader. Ved å linearisera som i figur 2, reknar vi at heile spekteret av reinsegrader er aktuelt, og resultatet av ei optimalisering kan bli reinsegrader som ligg mellom det konvensjonelle prosessar reknast gje. Slike resultat kan ein oppnå i praksis ved å blanda ulike delstraumar i reinseanlegget.

Målet er å få lægst mogleg reinsekostnad, eller

$$(2.14) \quad \min Z = \sum_i \text{COST}_i = \sum_i (a_i \cdot \epsilon_i + b_i)$$

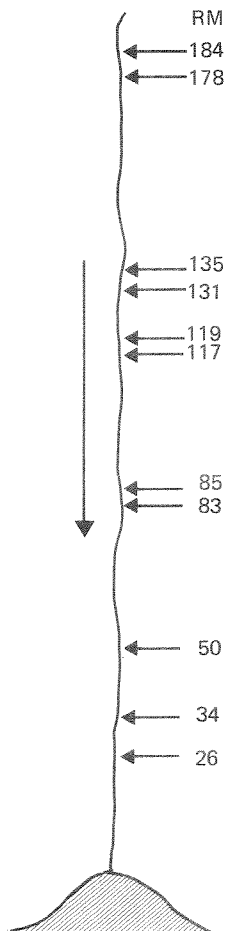
Alle  $b_i$  er konstantar for anlegga, så dei kan haldast utanom målfunksjonen (så sant anlegga skal byggjast).

Målfunksjonen kan difor uttrykkjast som

$$(2.15) \quad \boxed{\min \text{COST} = \sum_i a_i \cdot \epsilon_i}$$

### 2.3 Døme på oksygenmodell

#### 2.3.1 Problemstilling



Nedover eit vassdrag er det ulike utslepp frå tettstader og industri. Utsleppa fører til oksygenproblem i elva. Dømet er henta frå (3).

#### Oppgåve:

- Kva er billegaste løysing for å nå oppsette mål for oksygenkonsentrasjonar?
- Kva blir tilleggskostnaden ved lik reinsegrad for alle anlegg.

Figur 3. Vassdragsskisse.

### 2.3.2 Gitte data

Tabell 1 syner data som er nytta.

### 2.3.3 Problemformulering

$$\text{Generell form:} \quad \min \text{ COST} = \sum_{i=1}^{11} a_i \cdot \varepsilon_i$$

Føresetnader:

- Likningane (2.6), (2.12) og (2.10) skal oppfyllest for alle  $i$
- Gitte mål for konsentrasjonsverdiar.

Alle variable  $\geq 0$

Koeffisientane til bruk i likningane (6), (12) og (10) er synt uttrekna i tabell 1. Vedlegg 1 syner fullstendig formulering.

### 2.3.4. Resultat

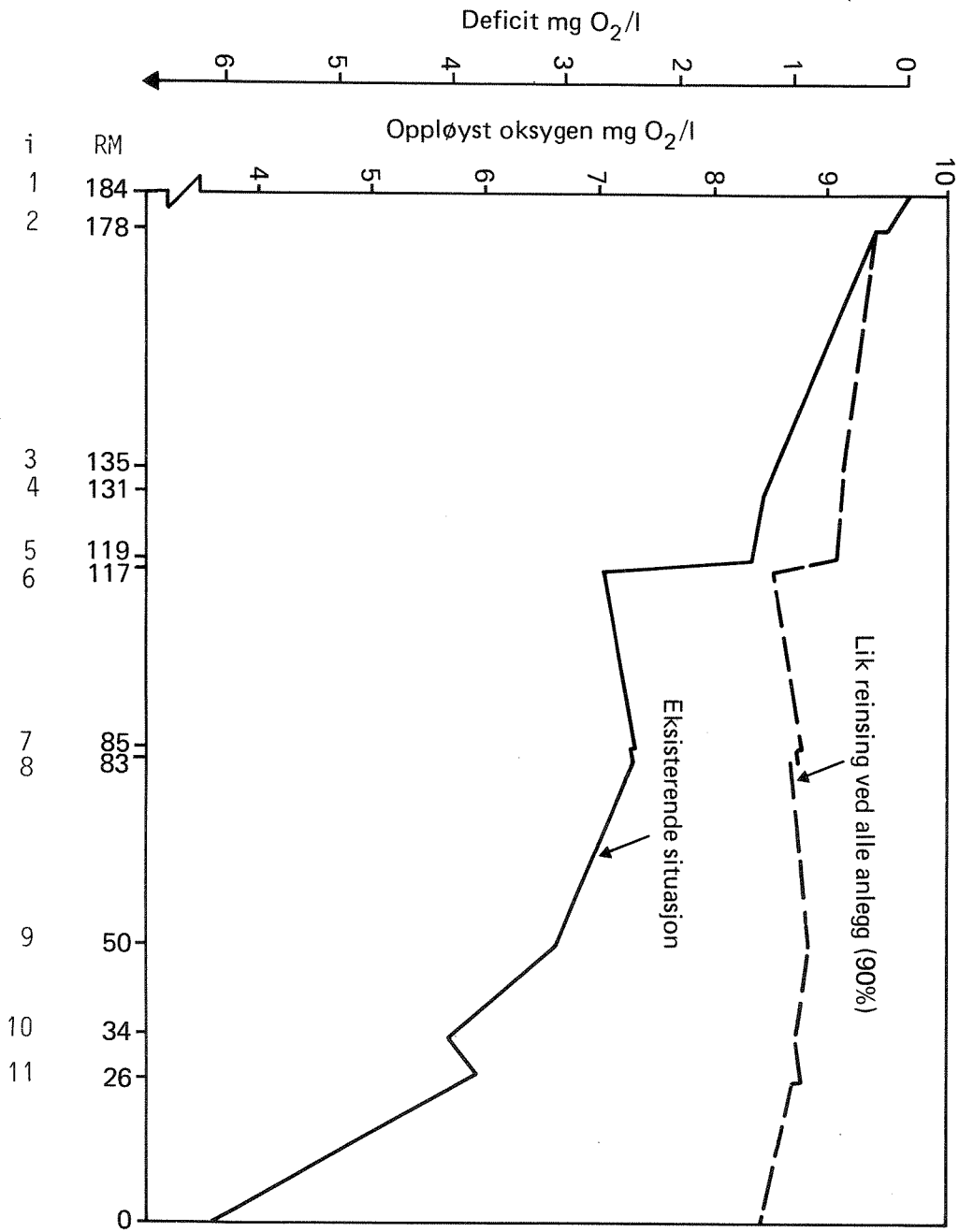
Fire situasjonar er analysert:

- 1) Eksisterande situasjon, der ein del av avløpsvatnet er reinsa, ein del ikkje.
- 2) Minstekostnadsløysing for å tilfredsstille standard 1. Standard 1 står for det sett av konsentrasjonsverdiar vi ønskjer oppnå, jfr. fig.5.
- 3) Minstekostnadsløysing for å tilfredsstille standard 2. Standard 2 inneheld eit nytt sett av konsentrasjonsverdiar vi ønskjer oppnå, jfr. fig. 6.
- 4) Lik reinsing for alle anlegg.

Figur 4 syner eit profil for oppløyst oksygen (DO) for eksisterande situasjon i vassdraget, og for situasjon 4 med 90 % BOF-fjerning ved alle påslepp av avløpsvatn. Figuren gjev yttergrenser for det området ein kan operera innanfor. Vi gjer merksam på at figurane ikkje gjev eit heilt rett bilete av oksygenkonsentrasjonane, i det kun start- og sluttverdiane i elveavsnitta er utrekna, og det er trekt rette liner mellom.

ELVE "MÅLE"	t	k1	k2	t <sub>i</sub>	k <sub>1t<sub>i</sub></sub>	k <sub>2t<sub>i</sub></sub>	$\frac{-k_1 t}{e}$	$\frac{-k_2 t}{e}$	$\frac{k_1}{k_2 - k_1}$	f <sub>i</sub>	g <sub>i</sub>	L <sub>w</sub> *i	Q <sub>wi</sub>	C <sub>w</sub>	$\alpha \cdot 10^{-3}$	B	a <sub>i</sub>	b <sub>i</sub>
184	1	0,312	1,02	0,235	0,0733	0,2397	0,9293	0,7869	0,4407	0,0628	0,1869	249	4,83	1359	0,00354	0,996	0,465	0,347
178	2	0,335	0,71	1,040	0,3484	0,7384	0,7058	0,4779	0,8933	0,2036	0,4779	284	31,3	2521	0,01154	0,988	0,425	0,017
135	3	0,342	0,72	0,105	0,0359	0,0756	0,9647	0,9272	0,9048	0,0339	0,9272	118	4,16	2718	0,00153	0,998	0,0419	0,023
131	4	0,342	0,72	0,306	0,1040	0,220	0,9000	0,800	0,90	0,09	0,800	121	12,9	2730	0,0047	0,995	0,451	0,023
119	5	0,358	0,65	0,035	0,0125	0,022	0,987	0,978	1,22	0,01	0,978	93	14,0	2777	0,0050	0,995	0,061	0,217
117	6	0,358	0,63	1,087	0,3890	0,685	0,677	0,504	1,31	0,226	0,504	240	8,4	2431	0,0024	0,990	0,114	0,161
85	7	0,405	0,60	0,081	0,033	0,049	0,968	0,952	2,077	0,033	0,952	65	14,2	3697	0,004	0,996	0,431	0,192
83	8	0,408	0,60	1,330	0,540	0,798	0,583	0,450	2,125	0,283	0,450	408	36,8	3544	0,010	0,990	0,352	0,425
50	9	0,352	0,09	2,067	0,727	0,186	0,483	0,830	-0,796	0,27	0,830	1440	4,0	3844	0,001	0,999	0,0435	0,113
34	10	0,352	0,14	1,050	0,369	0,147	0,691	0,863	-0,715	0,123	0,863	2180	0,33	3339	8,3 · 10 <sup>-3</sup>	1,000	0,0039	0,005
26	11	0,302	0,015	6,130	1,850	0,091	0,157	0,913	-0,952	0,719	0,913	279	40,7	4496	0,0039	0,991	0,906	0,387

Tabell 1. data til oksygenproblemet.



Figur 4. Ulike løysingar med tilhøyrande måloppnåing.

I figur 5 er også standard 1 innlagt, med tilhørende minstekostnadsløsning for å nå dette målet. Vi merker oss at vi ligg på standardnivået to stader: ved knutepunkt 6, og ved utløpet. For å tilfredsstille krava, må anlegga 1 til og med 6 reinse maksimalt, dvs. 90 %, og minstekostnadsløsning og lik reinse-alternativet fell saman.

Figuren syner at standard 1 gjev eit visst slingringsmonn vidare nedover vassdraget, slik at ein kan kombinera reinseeffektar ved anlegga optimalt.

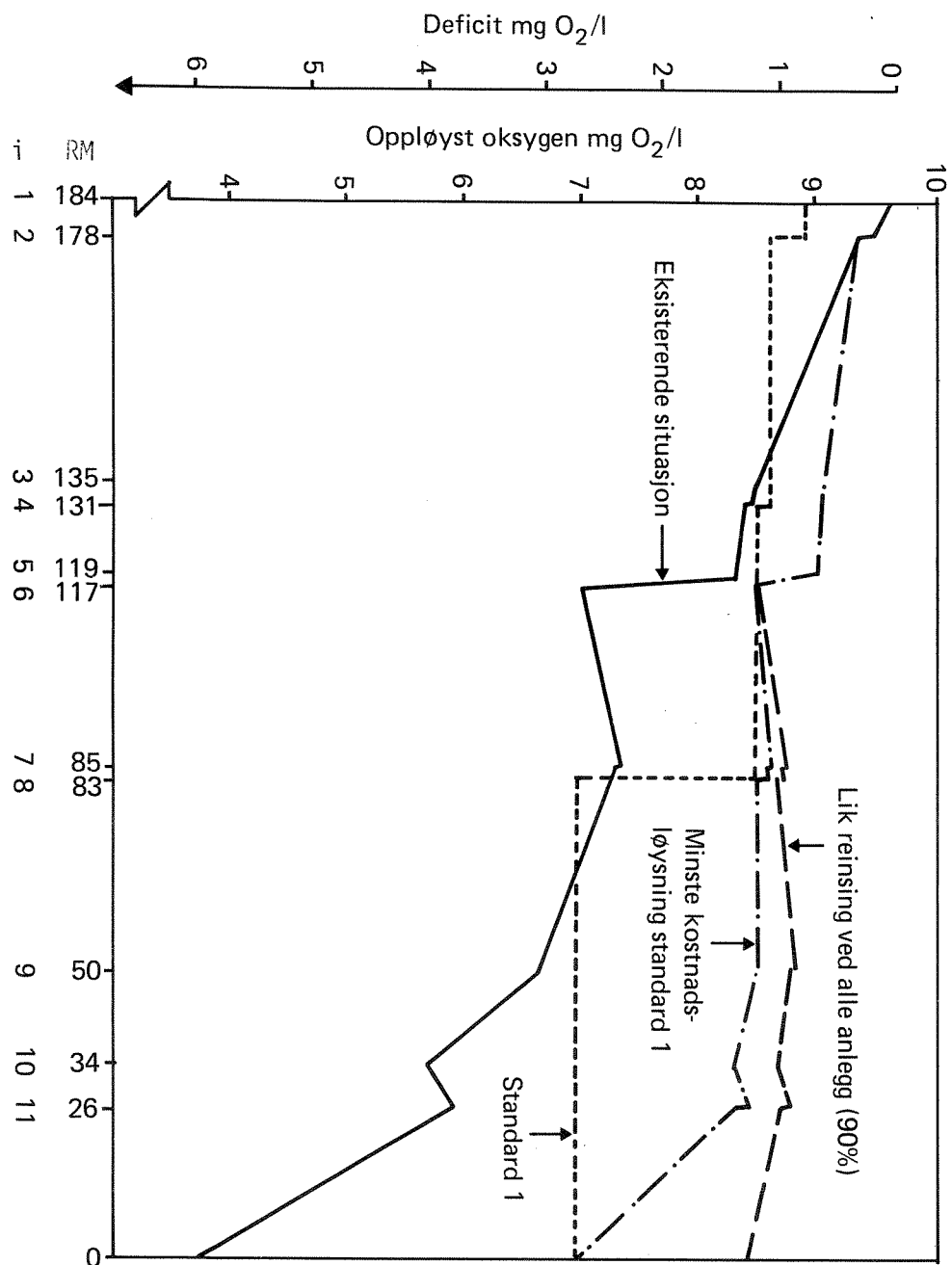
Standard 2 (figur 6) tillet at  $O_2$ -konsentrasjonen minkar frå 7,0 til 5,0 mg  $O_2/l$  frå knutepunkt 11 til utløpet. Framstillinga i figur 6 syner at minstekostnadsløsninga for dette nivået gjev oksygenkonsentrasjonar nede på standardnivå tre stader: etter knutepunkt 6, og like før og etter knutepunkt 10.

Figur 7 framstiller dei reinsegradene som har kome fram gjennom optimaliseringa. Vi merker oss minstekostnadsløsningane:

- for anlegga 1, 2, 3, 4 og 5 trengst 90 % BOD<sub>7</sub>-fjerning for både standard 1 og standard 2
- ved anlegg 6, 7 og 11 trengst inga reinsing for standard 1 og standard 2
- for anlegg 8, 9 og 10 oppnår ein ulikt resultat for standard 1 og standard 2.

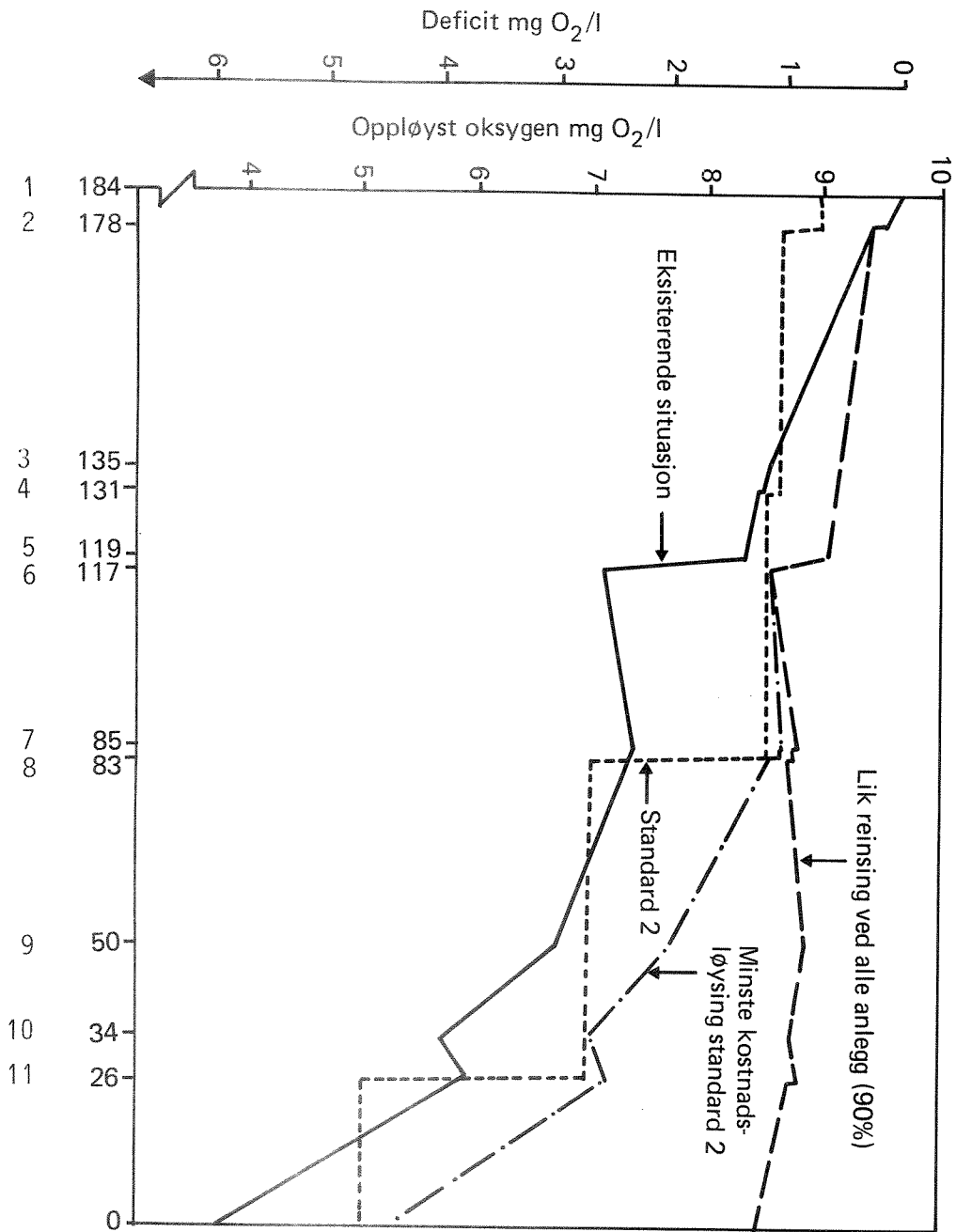
Kva utgjer skilnaden mellom alternativa kostnadsmessig? Figur 8 syner akkumulerte kostnader nedover vassdraget for dei tre aktuelle tiltaksalternativa. Den vesentlege skilnaden mellom minstekostnadsløsning for standard 1 og standard 2 kjem av anlegg 8, medan anlegg 11 blir spesielt dyrt ved lik-reinsing-alternativet.

I tabell 2 er gjort ei kostnadsjmføring.

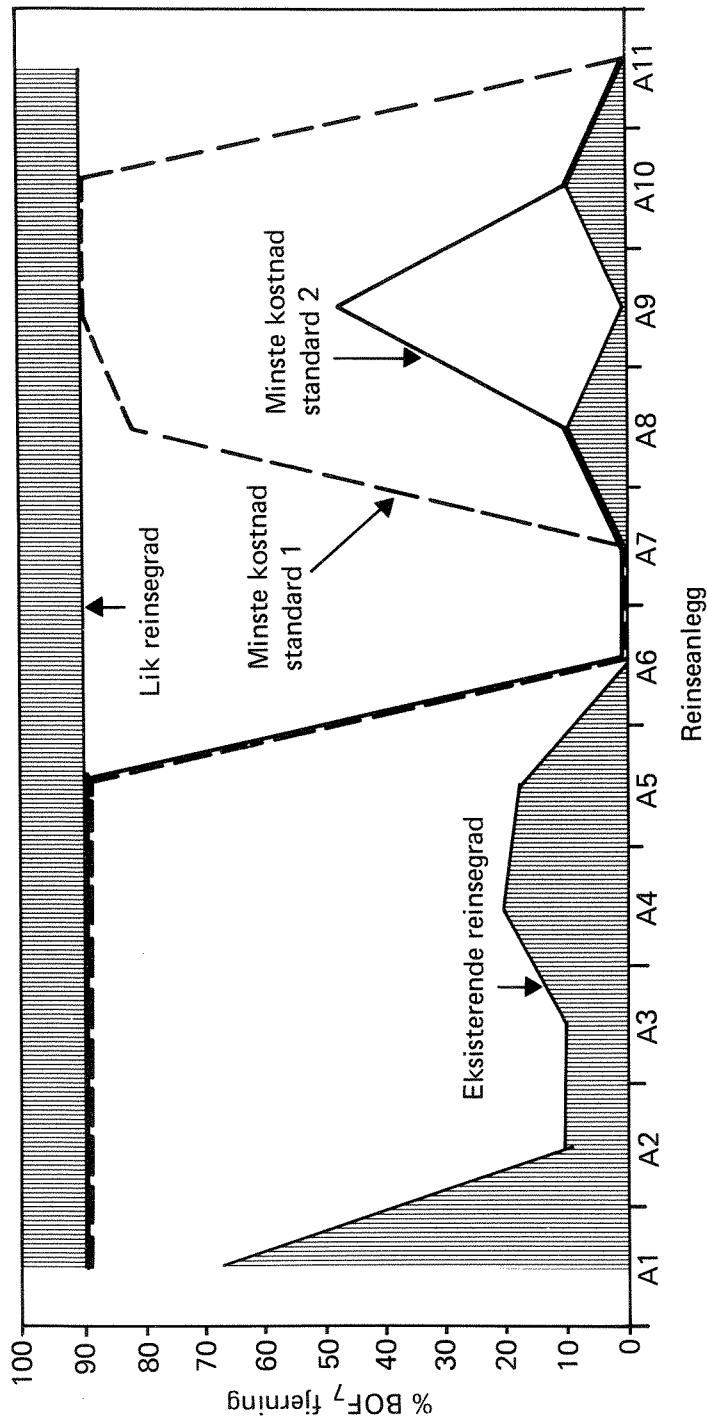


Figur 5. Ulike løysingar med tilhøyrande måloppnåing. Standard 1.

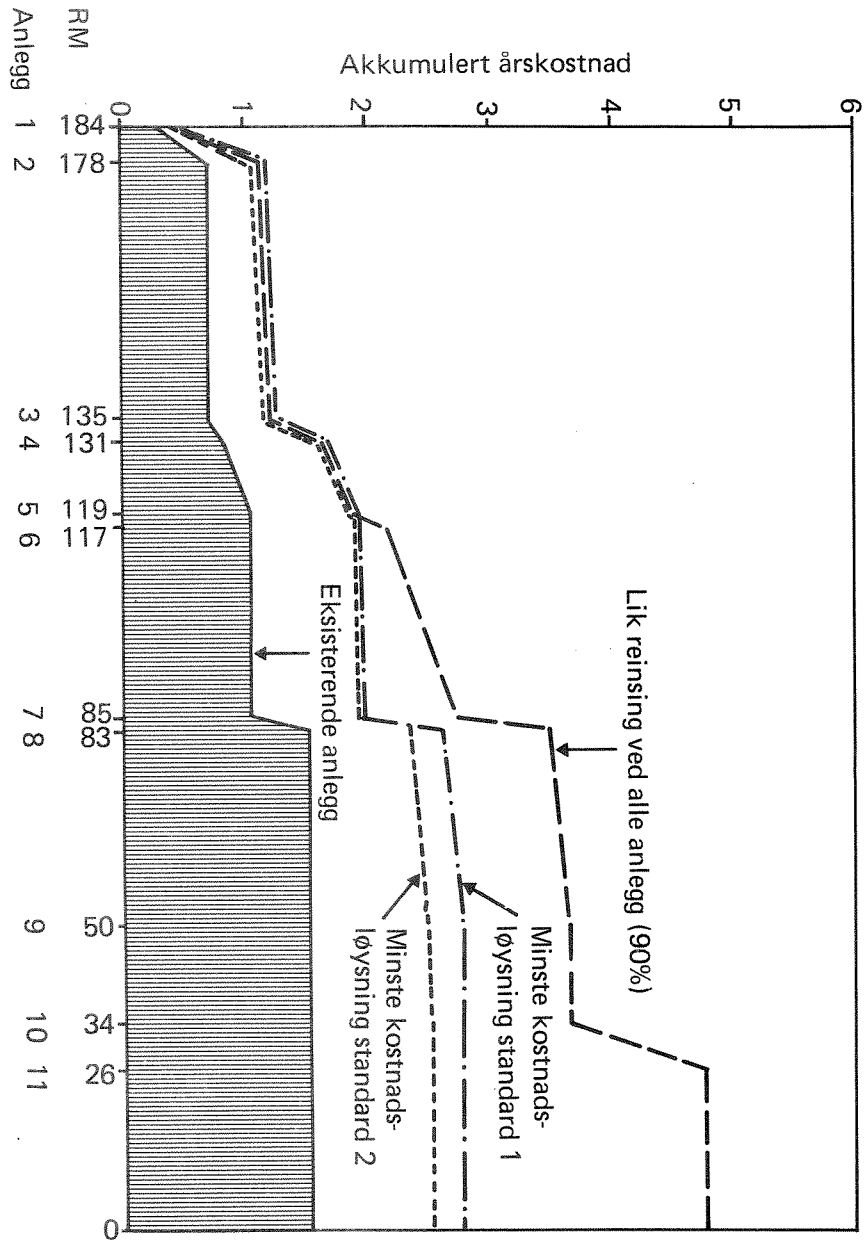




Figur 6. Ulike løysingar med tilhøyrande måloppnåing. Standard 2.



Figur 7. Reinsegrader for ulike alternativ.



Figur 8. Kostnader for ulike løysingar.

Tabell 2. Jamføring av kostnader.

Basis	Kostnadsauke for å nå:		
	Minstekostnad Standard 2	Minstekostnad Standard 1	Lik reinsing
Verdien av eksisterande anlegg	66 %	85 %	216 %
Anlegg etter minstekostnad 2	-	11 %	90 %

Kostnadsskilnaden mellom dei to minstekostnadsløysingane er ikkje stor. Går ein til lik reinsing for alle anlegg, blir kostnaden derimot mest det doble av minstekostnadsløysingane. Likevel finn ein ofte gode grunnar for slike løysingar: ingen skilnad i handsaminga av kommunar og industri, og ei trygging mot uventa verknader av utsleppa.

Kan vi stole på resultatata? I avsnitt 2.1.2 gjorde vi greie for at alle elve avsnitta måtte kontrollerast for  $t_j < t_c$ . Alternativet med maksimal reinsing gjev få problem. For minstekostnadsløysinga får vi derimot situasjonen som i tabell 3. Verdiane kjem fram ved å nytta likning (2.5), derivere, og finne maksimalt deficit og tilhøyrande  $t_c$ .

Tabell 3. Kritiske konsentrasjonar.

Elvestrekning	Nytta $t_j$ dagar	Utrekna $t_c$ dagar	Max deficit for $t=t_c$ mg $O_2/l$
1 - 2	0,235	1,625	1,277
2 - 3	1,04	1,749	
3 - 4	0,105	0,629	
4 - 5	0,306	0,599	
5 - 6	0,035	0,376	
6 - 7	1,087	0,788	
7 - 8	0,081	0,124	
8 - 9	1,330	1,684	
9 -10	2,067	4,549	
10 -11	1,05	2,261	
11 -utløp	6,13	10,011	

Tabell 3 indikerer at standarden på strekninga frå knutepunkt 6 til knutepunkt 7 er overskriden. Standarden hadde deficit lik 1.16 mg O<sub>2</sub>/l, medan maksimal deficit når opp til 1,28 mg O<sub>2</sub>/l. Ein burde difor ha delt avsnitt opp i to mindre soner, slik at problemet ikkje hadde oppstått.

### 2.3.5 Sensitivitet

Resultata avheng av dei koeffisientar og grenseverdiar som er nytta. Ei vurdering av endra føresetnader er difor ønskjeleg. Med dei standard programpakker for løysing av LP-problem som finst (t.d. (11)), er det mogeleg å få fram slike sensitivitetsanalysar på enkel måte. Som døme kan vi sjå litt på standard 2.

For reinseanlegga 1, 2, 3, 4 og 5 krevst maksimal reinsing for å tilfredsstille standard 2. Kostnadskoeffisienten for anlegg 9, a<sub>9</sub>, kan auke frå 0,0485 til 0,0855, og løysinga for optimal reinsegrad er den same, kostnadsauken utgjør 0,0169.

For å endre resultata for optimale reinsegrader, må vidare følgjande endringar skje: a<sub>6</sub> < 0,0245, a<sub>7</sub> < 0,0126, a<sub>8</sub> < 0,1996. Koeffisientane a<sub>10</sub> og a<sub>11</sub> kan gå mot null.

Endringar i k<sub>1</sub> og k<sub>2</sub> er vanskelegare å lesa ut direkte. Ulike verdiar må difor nyttast for å studera endringane.

## LP-MODELL FOR FOSFOR I ELVAR

### 3.0 Generelt atterhald

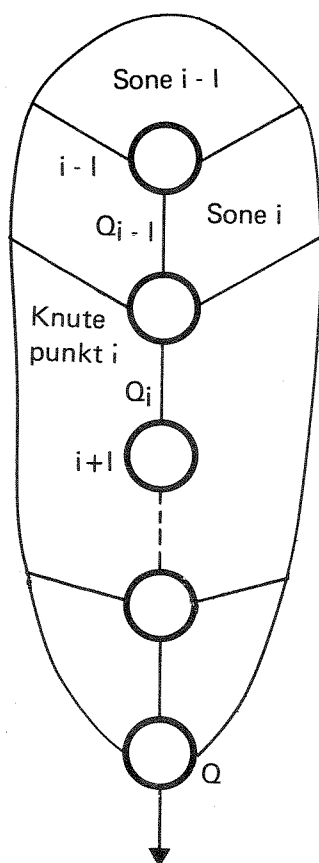
Fosforkonsentrasjonen i elvar varierer mykje. Elvar som mottek større punktutslepp frå industri eller kommunalt avløp syner ofte avtakande konsentrasjon med aukande vassføring, dvs. rein fortynningseffekt. I elvar med færre markerte punktutslepp blir biletet annleis. Auka erosjon i elveløp og nedbørfelt med påfølgjande auke i konsentrasjonen av total fosfor kan slå sterkare ut. Spesielt merkar ein dette i elvar som drenerer jordbruksområde på marine avsetningar, slik tilfellet t.d. er i nedre del av Numedalslågen.

Utover slike generelle vurderingar, kjenner vi ikkje detaljert korleis endringar i vassføringane påverkar endringar i fosforkonsentrasjonar. Skal eit forsøk på modellering, sjølv i si enkelte form, kunne forsvarast, må modelleringa kun tene til å ringa inn ein del problemområde.

Nedanfor vil vi ta eit generelt utgangspunkt, men gradvis forenkla og syna eit lite, praktisk døme ut frå forenklingane.

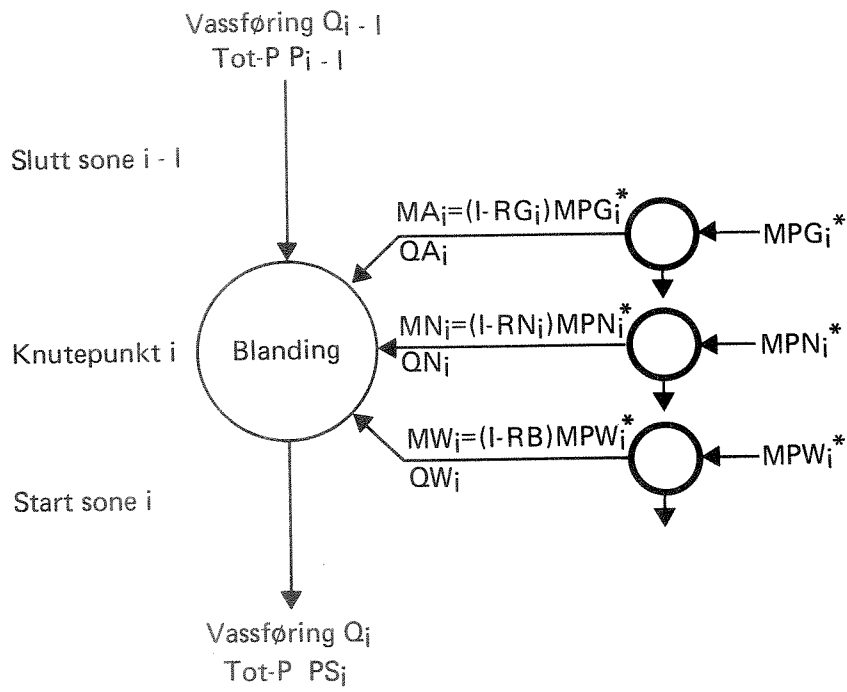
### 3.1 Likningar for prosessane

Vassdraget er inndelt i soner forbundne med knutepunkt. Alle tilførsler av vatn og forureinande komponentar er føresett skje i øvre knutepunkt i sona. Lik temperatur på tilførsler og elvevatn er føresett, likeeins ideell blanding. Sjå figur 9.



Figur 9. Skisse over vassdragsinndelinga.

### 3.1.1 Ideell blanding



Figur 10. Aktuelle strømar i blandeprosessen.

Følgjande nemningar er nytta:

$Q_{i-1}$  = vassføring frå sone  $i-1$  ( $m^3/s$ )

$Q_{Ai}$  = lokal tilførsle av vatn frå jordbruksområde i sone  $i$  ( $m^3/s$ )

$Q_{Ni}$  = lokal tilførsle av vatn frå anna arealavrenning i sone  $i$   
( $m^3/s$ )

$Q_{wi}$  = lokal tilførsle av vatn frå kommunalt avløp i sone  $i$  ( $m^3/s$ )

$MPG_i^*$  = masse fosfor tilført frå jordbruk i sone  $i$  (mg P/s)

$MPN_i^*$  = masse fosfor tilført frå andre areal i sone  $i$  (mg P/s)

$MPW_i^*$  = masse fosfor tilført frå kommunalt avløp i sone  $i$  (mg P/s)

$RG_i$  = fraksjon av tilførsleane frå jordbruk i sone  $i$  som vert fjerna (0-1)

$RN_i$  = fraksjon av tilførsleane frå anna arealavrenning i sone  $i$  som vert fjerna (0-1)

$RB_i$  = fraksjon av tilførsleane frå kommunalt avløp i sone  $i$  som vert fjerna (0-1)

$MA_i$  = tilført fosfor frå jordbruk i sone  $i$  (mg P/s)

$MN_i$  = tilført fosfor frå anna arealavrenning i sone  $i$  (mg P/s)

$MW_i$  = tilført fosfor frå kommunalt avløp i sone  $i$  (mg P/s)

$P_{i-1}$  = total fosforkonsentrasjon oppstrøms innblandingspunktet

$PS_i$  = total fosforkonsentrasjon rett nedstrøms innblandingspunktet.

Massebalansar:

$$(3.2) \quad Q_i = Q_{i-1} + Q_{Ai} + Q_{Ni} + Q_{wi}$$

$$(3.3) \quad PS_i \cdot Q_i = P_{i-1} \cdot Q_{i-1} + MA_i + MN_i + MW_i$$

$$(3.4) \Rightarrow \boxed{PS_i = \beta_i \cdot P_{i-1} + \gamma_i(MA_i + MN_i + MW_i)}$$

$$\text{der } \beta_i = Q_{i-1}/Q_i$$

$$\gamma_i = 1/Q_i$$



Set vi vassføringa ved utløpet til Q, og

$$a_i = Q_i/Q$$

$$a_{i-1} = Q_{i-1}/Q$$

blir 
$$\beta_i = \frac{a_{i-1}}{a_i} \quad \text{og} \quad \gamma_i = \frac{1}{a_i \cdot Q}$$

Likning (3.4) kan også uttrykkjast

$$(3.5) \quad PS_i = \beta_i \cdot P_{i-1} + \gamma_i \cdot (1 - RG_i) \cdot MPA_i^* + \gamma_i \cdot (1 - RN_i) \cdot MPN_i^* + \gamma_i \cdot (1 - RB_i) \cdot MPW_i^*$$

$$(3.6) \quad PS_i = \beta_i \cdot P_{i-1} + \gamma_i \cdot (MPA_i^* + MPN_i^* + MPW_i^*) - \gamma_i \cdot MPA_i^* \cdot RG_i - \gamma_i \cdot MPN_i^* \cdot RN_i - \gamma_i \cdot MPW_i^* \cdot RB_i$$

Splittar ein tilførslene i ein løyst og ein partikulær fosforfraksjon, kan ein få fram løyst og partikulær PS.

### 3.1.2 Prosessar mellom tilførslepunkta

Fosfor som vert tilført vassdraget, vil inngå i reaksjonar med andre kjemiske komponentar og vera byggemateriale for organisk stoff. Ein del kan knyttast til sediment for seinare å bli resuspendert. Kunnskapen om desse prosessane er dels mangelfull.

For vårt føremål tek vi utgangspunkt i dei undersøkingar NIVA gjorde i 1981 i renneforsøk og i Lenavassdraget (4).

#### 3.1.2.1 Fosfat

Dei løyste fosfata synte seg å bli knytta både til partiklar i vatnet og til botnsedimenta. Følgjande samband vart etablerte:

Sorpsjon til slampartiklane:

$$(3.6) \quad \frac{dc}{dt} = k_{\text{part}} \cdot X$$

$$(3.7) \quad C_{\text{part}} = C_0 \cdot e^{-k_{\text{part}} \cdot X}$$

der  $C_{\text{part}}$  = Konsentrasjonen av fosfat i avstanden  $x$  frå utgangspunktet ( $\mu\text{g P/l}$ ).

$C_0$  = konsentrasjonen av fosfat i utgangspunktet ( $\mu\text{g P/l}$ )

$k_{\text{part}}$  = koeffisient ( $\text{m}^{-1}$ )

$x$  = avstand frå utgangspunktet (m)

Renneforsøk (4) gav som resultat  $k_{\text{part}} = 0,035 \text{ m}^{-1}$ .

Sorpsjon til botnsediment:

$$(3.8) \quad \frac{dc}{dt} = k_{\text{sed}} \cdot X$$

$$(3.9) \Rightarrow C_{\text{sed}} = C_0 \cdot e^{-k_{\text{sed}} \cdot X}$$

med  $C_{\text{sed}}$  = konsentrasjonen av fosfat i avstanden  $x$  frå utgangspunktet ( $\mu\text{g P/l}$ )

$C_0$  = konsentrasjonen av fosfat i utgangspunktet ( $\mu\text{g P/l}$ )

$k_{\text{sed}}$  = koeffisient ( $\text{m}^{-1}$ )

$X$  = avstand frå utgangspunktet (m)

I renneforsøka (4) vart  $k_{\text{sed}}$  bestemt til:

$$k_{\text{sed}} = 1.7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

Saman gjev desse likningane følgjande utvikling for fosfat:

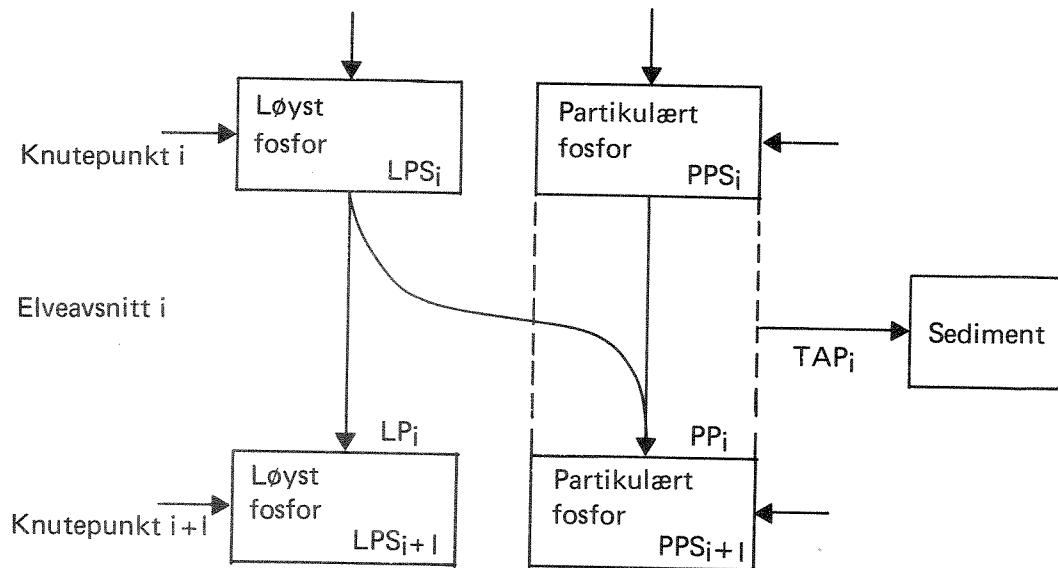
$$(3.10) \quad LP_i = LPS_i \cdot (e^{-k_{\text{part}} \cdot X} + e^{-k_{\text{sed}} \cdot X})$$

der  $LP_i$  = konsentrasjonen av fosfat-fosfor ved slutten av elveavsnitt  $i$  ( g P/l)

$LPS_{i+1}$  = konsentrasjonen av fosfat-fosfor ved starten av elveavsnitt  $i+1$  ( g P/l).

### 3.1.2.2 Partikulært fosfor

Massetransporten av totalt fosfor i elvane varierer mykje med vassføringane. Grunnen er truleg utvasking av partiklar frå elvebreidda og resuspensjon av sedimentert materiale frå elvefaret. For å få ta omsyn til denne dynamikken, treng ein korte tidssteg (t.d. 1 dag). Slike tidssteg er praktisk umogeleg å operera med i L-P grunna store program og reknetider, men skissemessig er massebalansen synt i figur 11.



Figur 11. Skisse over fosforbalanse.

Vurderingane inneber:

- ein del løyst fosfor går over til partikulært fosfor.
- av det partikulære fosforet, skjer det eit nettotap (positiv eller negativ) til sedimenta, vidare kalla  $TAP_i$  for elveavsnitt  $i$ .

Likningar:

$$(3.11) \quad PP_i = PPS_i + (LPS_i - LP_i) - TAP_i$$

Innsett frå likning (3.10) for  $LP_i$ :

$$(3.12) \quad PP_i = PPS_i + \kappa_i \cdot LPS_i - TAP_i$$

$$\text{der } \kappa_i = 1 - e^{-k_{\text{part}} \cdot X_i} - e^{-k_{\text{sed}} \cdot X_i}$$

Tapsleddet kan som eit utgangspunkt setjast lik

$$(3.13) \quad TAP_i = LPS_i \cdot e^{-k_{\text{sed}} \cdot X_i}$$

### 3.1.3 Oppsummering av prosesslikningar

#### 1. Blandeprosessen

For løyst og partikulær fosforfraksjon stiller ein opp to massebalanselikningar. Tilførsleane må splittast i desse to fraksjonane, og reinsegrader gjevast for kvar fraksjon og tilførsle. Likning (3.6)

#### 2. Prosessreaksjonar

Likning (3.10)

Likning (3.12)

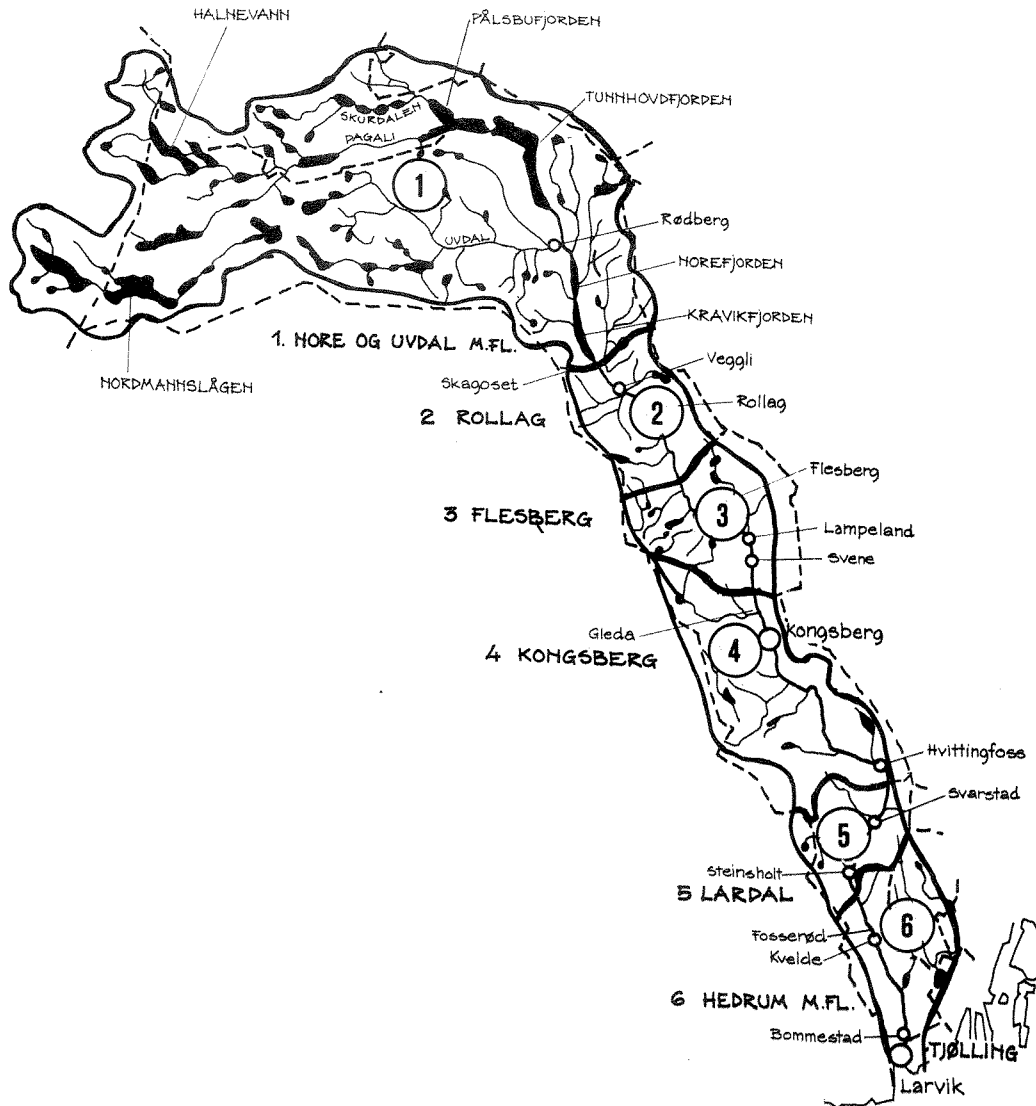
Likning (3.13)

### 3.2 Målformulering

På tilsvarande måte som for oksygenproblemet, må det etablerast eit lineært samband mellom reinsekostnad og reinsegrad.

#### 4. ENKEL L-P-MODELL FOR TOTALT FOSFOR. I NUMEDALSLÅGEN

##### 4.1 Problemstilling



Figur 12. Skisse over vassdraget (frå 7) med soneinndeling.

Etter at tømmerfløytina slutta i Numedalslågen, er det mogeleg å disponera tømmerfløytingsvatnet på annan måte. Korleis verkar dette inn på forureiningstilstanden? NIVA har utført anna arbeid for å gje svar på dette. (5). Vurderingane nedanfor syner enkel bruk av  $LP_i$  i vasskvalitetsvurderingar, der spørsmåla m.a. er:

- Kva er praktisk mogeleg å oppnå?
- Kva er billegaste løysinga?
- Kva blir tilleggskostnaden ved lik reinsegrad for alle kommunale anlegg?

#### 4.2 Datagrunnlag

##### 4.2.1 Generelt

Følgjande tilnærmingar er gjort:

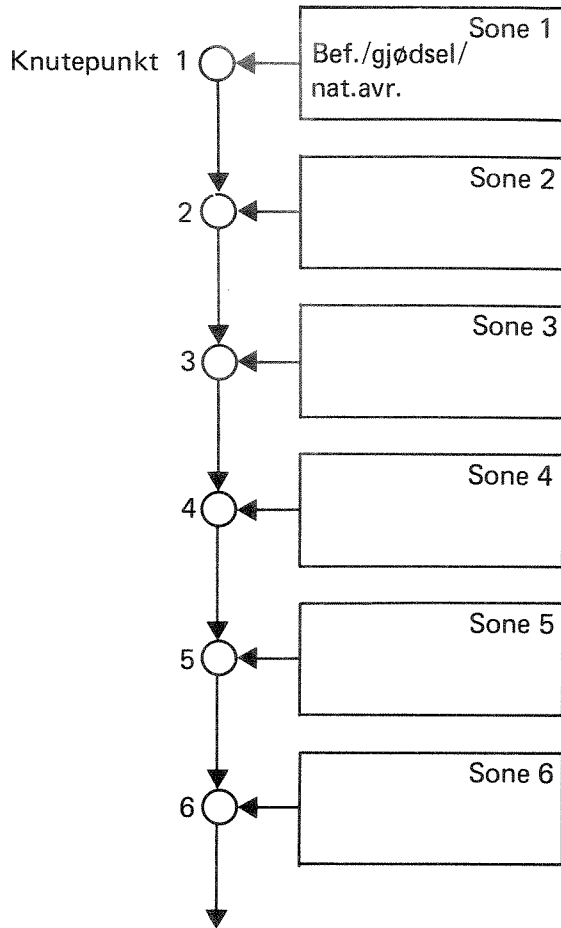
- vassdraget er inndelt i soner som svarar til kommunegrensene. Fig. 12.
- alle tilførsler skjer i knutepunkta. Tilførsler frå ei sone er ført til øvre knutepunkt i sona, figur 13.
- tilførsler av fosfor frå ulike kjelder er basert på data frå (6).

##### 4.2.2 Fordeling av vassmengder

Tilrenninga frå dei ulike sonene er gjort proporsjonal med tilrenningsarealet, med resultat som i tabell 4.

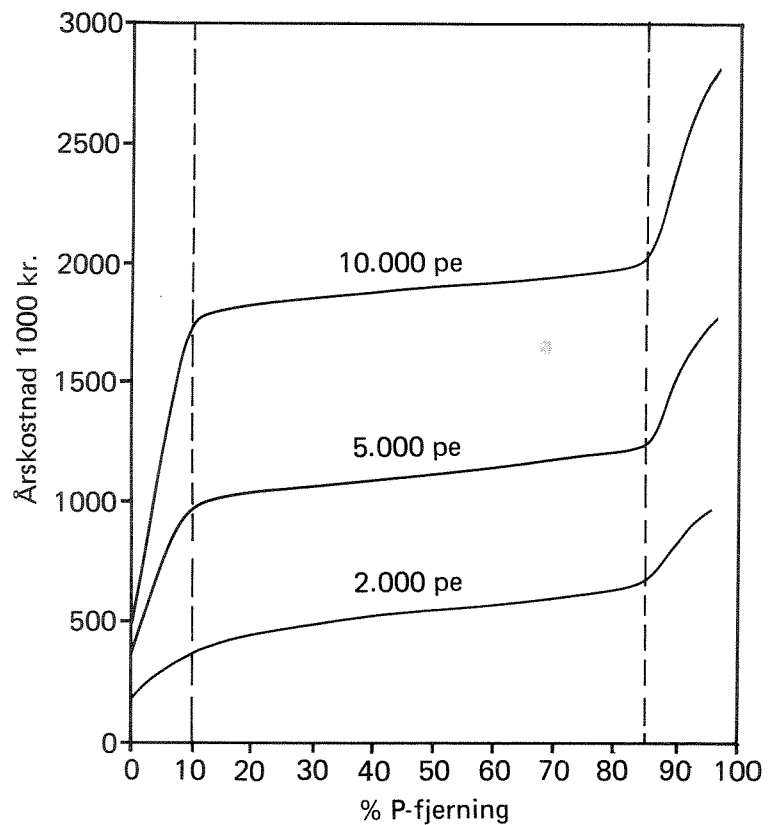
SONE	Lokal tilrenning i % av vassføring ved utløpet	Vassføring i elva i % i høve til vass- føring med utløpet
1	60	60
2	5	65
3	8	73
4	13	86
5	6	92
6	8	100

Tabell 4. Fordeling av vassmengder frå dei ulike sonene.



Figur 13. Skisse over inndelinga.

Figur 14. Årskostnad som funksjon av reinsegrad. (bearbeidd etter (8)).



#### 4.2.3 Fordeling av forureiningstilførsler

Data om tilførslene frå jordbruk, gjødsling og naturleg avrenning er henta frå (6), medan (7) er nytta for data om reinseanlegg og folketal.

Det finst fleire reinseanlegg innanfor kvar av sonene. Ein gjennomsnittleg reinseffekt for alle desse anlegga i sona er utrekna under føresetnad av at dei fungerer tilfredsstillande for den belastninga dei har.

Tabell 5 summerer opp bidraga frå sonene, rekna i tonn fosfor/år og vidare jamnt fordelt over året og gitt i  $\mu\text{g P/s}$ .

Sone	Innbygg Pers.	Tilknytt		Total R-grad med nov.tilkn. i %	Tilførsler tonn P/år ug P/s		
		PE	R-grad %		Tot.bidrag befolkn. urensa	Gjødsling	Nat.avrenning jord,skog Areal.
1	2850	725	76	19	2,60 82,4	0,310 9,8	18,71 593,0
2	1450	660	49	22	1,32 41,9	0,164 5,2	1,83 58,0
3	2500	810	3	1	2,28 72,3	0,273 8,7	2,70 85,7
4	20500	8600	72	30	18,71 593,0	0,674 21,3	4,40 139,0
5	2300	700	85	26	2,10 66,6	4,800 151,0	2,12 67,2
6	7900	1450	85	16	7,21 229,0	9,600 304,0	2,90 91,8

Tabell 5. Fordeling av forureiningstilførsler.



#### 4.2.4 Kostnadstal for reinsing

Vi har ikkje grunnlag for å vurdere kostnader for anna enn kommunalt avløp. Difor blir kun desse handsama vidare.

Typiske kostnader som funksjon av reinsegrad er synt i tabell 6 og figur 14.

	Type reinsing				
	Sil	Mekanisk	Priærfelling	Sekundærfelling	Etterfelling
% P-fjerning	0	10	80	85	95
200 pe	160	-	650	850	940
5000 pe	260	1000	1240	1550	1740
10000 pe	370	1800	2000	2450	2800

Tabell 6. Årskostnader for ulike reinseanlegg.  $10^3$  kr. Frå (8).

Innanfor kvar sone finst, eller er planlagt, fleire kommunale reinseanlegg. Tabell 7 syner det grunnlagsmaterialet som er nytta. Årskostnaden for kvart anlegg er utrekna etter (8). Kostnadstala representerer årskostnadene for eit nytt kjemisk primærfellingsanlegg med nødvendig kapasitet.

For vidare bruk er alle anlegga innan kvar sone slått saman, og ein gjennomsnittskostnad utrekna, slik tabell 8 syner.

Kostnadsparametrane som er nytta vidare, er basert på lineariseringa

$$\text{Cost}_j = a_j \cdot \text{RB}_j + b_j$$

der  $b_j$  = konstantledd

$a_j$  = kostnad pr. reinseeining

$\text{RB}_j$  = reinsegrad (fraksjon)

$\text{Cost}_j$  = årskostnad.

Sone	Anlegg	I dag: Antatt % P-red.				Personeiningar			Årskost.kjemisk fell- anl.fullt utbygd	
		0	10	15	18	Til- knytta	Tillat	Nødv. kapas.	1000 kr.	1000 kr/pe
1	Stormogen				X	100	350	350	295	0,84
	Øygardsgrend			X		25	50	50	87	1,74
	Rødberg				X	550	550	1100	469	0,43
	Langodden	X				50	100	100	83	0,83
2	Veggli				X	350	700	700	457	0,65
	Numedal	X				150	150	150	173	1,15
	Rollag			X		160	1000	600	415	0,69
3	Flesberg	X				200	400	200	207	1,04
	Lampeland			X		170	800	800	498	0,62
	Lyngdal	X				40	150	170	187	1,10
	Svene	X				300	420	420	332	0,79
	Svene Aldershjem	X				100	100	100	134	1,34
4	Kongsberg				X	7000	25330	25000	4446	0,18
	Heistadmoen			X		800	800	800	498	0,62
	Hvittingfos			X		800	1000	1000	437	0,44
5	Svarstad				X	700	1200	1200	499	0,42
6	Hvarnes				X	400	500	400	226	0,57
	Kvelde				X	700	1500	1500	586	0,39
	Kodal				X	350	550	800	498	0,62

Tabell 7. Reinseanlegg og kostnader.

Parametrane er synte i tabell 8 og reknast gjelde i området  $0,10 < RB < 0,85$ .

Sone	$b_j$	$a_j$	Nytta høvestal mekanl/primf.anl.
1	426	5,98	0,52
2	500	6,41	0,54
3	619	8,69	0,51
4	4771	7,17	0,90
5	284	2,53	0,62
6	686	7,34	0,58

Tabell 8. Kostnadsparametrar.

#### 4.3 Problemformulering

Datagrunnlaget tillet ikkje detaljert oppsplitting i fosforfraksjonar. Data er heller ikkje innsamla og bearbeidd på slik måte at ei detaljert oppløysing er mogeleg. Det er ikkje noko i vegen for å bruke anna oppløysing og detaljering, om ein legg tid og krefter i datainnsamling.

Som dei generelle likningane framanfor har synt, er dei fleste koeffisientane i likningane avhengig av vassføringa  $Q$  ved utløpet. Vi har valt å nytta  $Q=100 \text{ m}^3/\text{s}$  som basis, dvs. ei vassføring som ligg noko under årsmiddelvassføringa på  $120 \text{ m}^3/\text{s}$ .

Vi føreset vidare ideell blanding og ingen prosessreaksjonar, dvs. vi reknar rein fortynningseffekt.

For område 1 er det ein del innsjøar. Startpunktet er difor sett til utløpet av sone 1, med ein pårekna total fosforkonsentrasjon på  $4,0 \text{ g P/l}$  (9, 10).

Det er ikkje noko i vegen for å nytta anna vassføring, andre koeffisientar og ha anna inndeling.

Vi understrekar difor at oppstillinga nedanfor kun er eit døme på formu-  
lering.

Ut frå dei generelle likningane gjev verdiane i dette avsnittet:

$$\text{Min Cost} = 6,41 \text{ RB}_2 + 8,69 \text{ RB}_3 + 7,17 \text{ RB}_4 + 2,53 \text{ RB}_5 + 7,34 \text{ RB}_6$$

Under føresetnader:

$$P_2 = 1,62 - 0,89 \text{ RN}_2 - 0,08 \text{ RG}_2 - 0,64 \text{ RB}_2 + 0,92 P_1$$

$$P_3 = 2,28 - 1,17 \text{ RN}_3 - 0,12 \text{ RG}_3 - 0,99 \text{ RB}_3 + 0,89 P_2$$

$$P_4 = 8,76 - 1,62 \text{ RN}_4 - 0,25 \text{ RG}_4 - 6,90 \text{ RB}_4 + 0,85 P_3$$

$$P_5 = 3,10 - 0,73 \text{ RN}_5 - 1,64 \text{ RG}_5 - 0,72 \text{ RB}_5 + 0,93 P_4$$

$$P_6 = 6,25 - 0,92 \text{ RN}_6 - 3,04 \text{ RG}_6 - 2,29 \text{ RB}_6 + 0,92 P_5$$

$$0,10 \leq \text{RB}_i \leq 0,85 \quad i = 2, \dots, 6.$$

$$\text{eller } \text{RB}_i = 0$$

$$P_1 = 4,0$$

$$P_i < \text{gitte verdier } i=2, \dots, 6.$$

#### 4.4 Resultat

Situasjonen med vassføring  $Q = 100 \text{ m}^3/\text{s}$  ved utløpet er analysert med LP-pakken LINE (11).

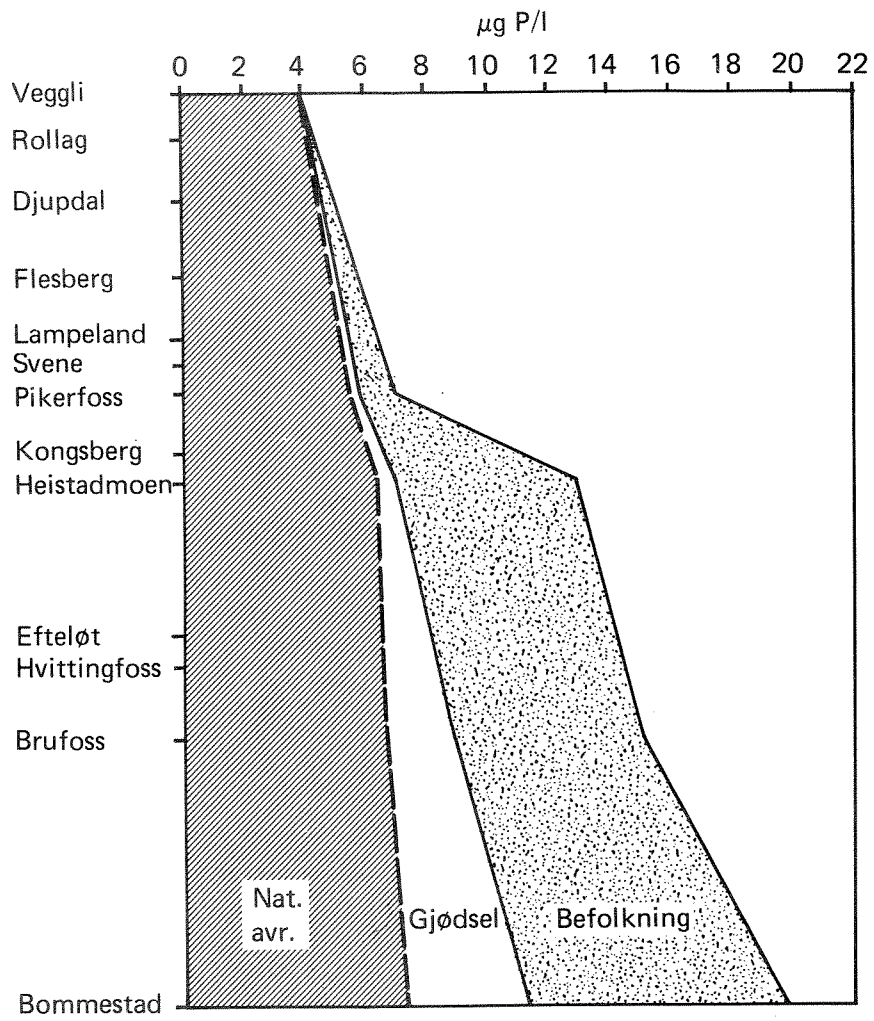
I figur 15 er teikna eit profil som syner bidraget frå dei ulike kjeldene i vassdraget. Frå Kongsberg og nedover vil bidraget frå befolkninga vera vesentleg dersom ein ikkje har reinsing.

I figur 16 er også synt dagens situasjon for kommunalt avløp, medan dei andre kjeldene er som i figur 15. Figuren syner også kva ein kan oppnå ved reinsetiltak.

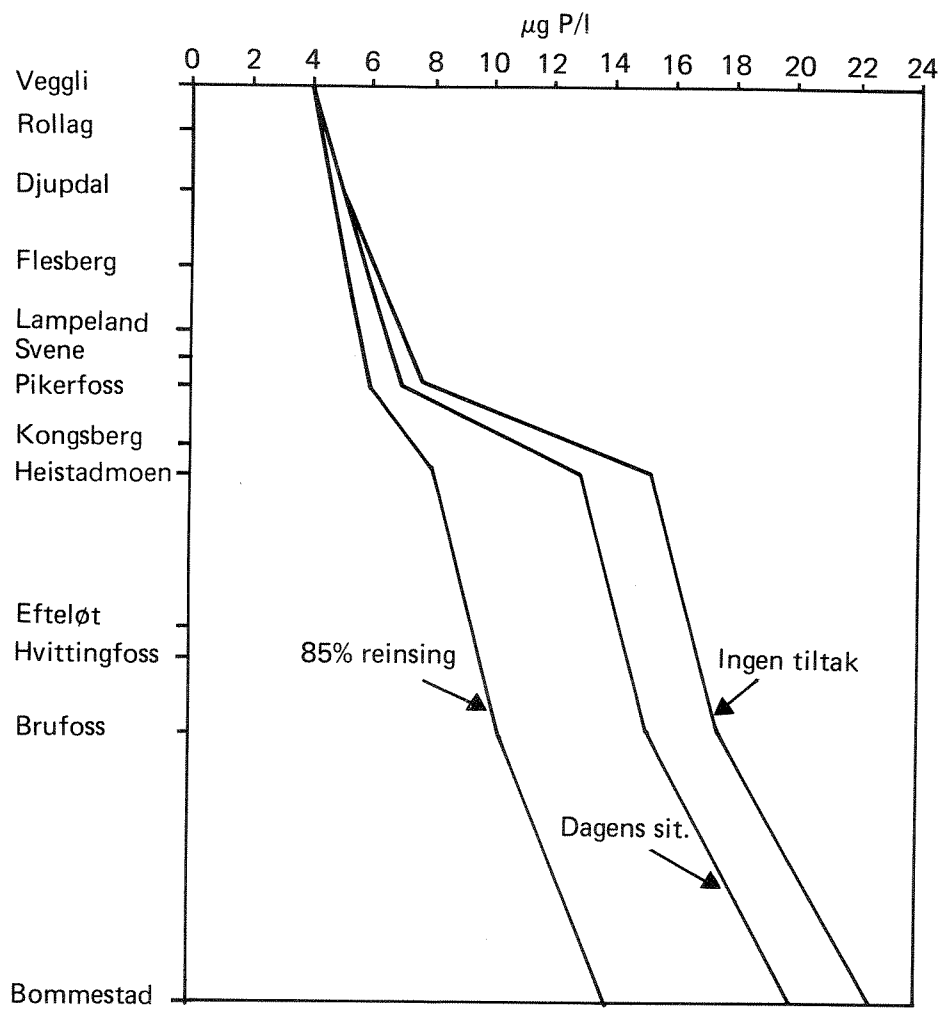
Vi tek med eitt døme på korleis LP kan brukast ved vurdering av tiltaksstrategi.

Vi har sett følgjande standard:

sone	2	-	6	g P/1
"	3	-	6	g P/1
"	4	-	8	g P/1



Figur 15. Bidrag frå ulike kjelder. Situasjon utan reinsing.



Figur 16. Fosforkonsentrasjonen ved ulike tiltak mot kommunalt avløp.

sone 5 - 11 g P/l  
" 6 - 14 g P/l

Vi foreset at kun tiltak mot kommunalt avløp kan gjennomførast. Standard og løysingsresultat er synt i figur 17. I sone 2 er gjennomsnittleg reinsegrad utrekna til 27 %, og i sone 5 krevst inga reinsing.

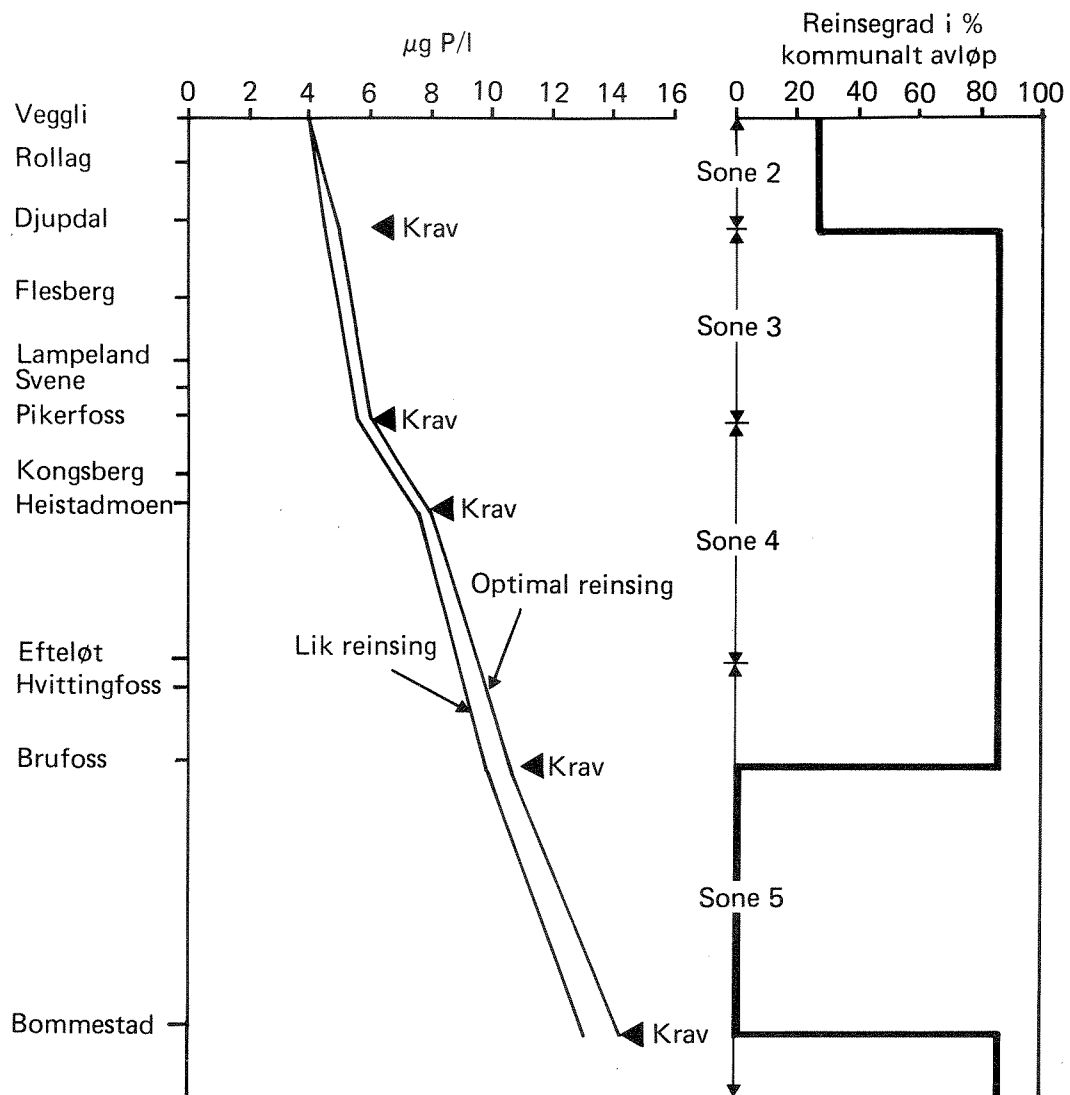
Som alle figurane syner, bør innsats mot betring av forureiningstilhøva i første rekkje setjast inn kring Kongsberg.

Kostnadmessig jamføring er gjort i tabell 9.

	Lik reinsing	Optimal reinsing
Årskostnad ( $10^3$ kr)	10 526	9 139
Tilleggs-kostnad ( $10^3$ kr)	1 387	-
Relativ kostnad	115	100

Tabell 9. Kostnadsjamføring.

Vi vil ikkje gjere vidtrekkjande konklusjonar ut frå dette arbeidet, spesielt fordi vi ikkje har hatt høve til å granska grunnlagsmaterialet tilstrekkeleg. Tabell 9 er likevel interessant. Vi kan oppnå innsparinger ved å vera meir nyanserte ved tiltak mot kommunalt avløp, og ikkje krevja tilnærma same reinsegrad ved alle anlegg. Ved å setja inn innsatsen der effekten er størst, kan vi kanskje oppnå målet likevel: Tilfredsstillande forureiningstilhøve, og mindre kostnader.



Figur 17. Nødvendige tiltak for å nå gitt standard.  
Standarden er kun sett som eit døme.



## 5. OPPSUMMERING

Føremålet med denne rapporten har vore å gje enkle døme på korleis LP kan brukast ved vurdering av tiltak mot forureiningar. Ved å bruka døme opplever ein mykje lettare dei føresetnader og forenklingar som ligg bak sjølve teknikken.

Vårt føremål har ikkje vore å gje konkrete råd ved t.d. tiltak i Numedalslågen. For å gjera dette på fullgod måte, trengst ein mykje meir detaljert gjennomgang av tilførslene, finare geografisk oppdeling, og ei nøyare vurdering av vassføringsendringane.

Vi vurderer bruk av LP som interessant, men også gjennom dette enkle arbeidet blir det absolutt svakaste leddet avdekket: Kva med prosessane i sjølve vassdraget? Kjennskapen til desse er mangelfull, og vil også vera det i lang tid framover. Dette kan også vera grunn til at optimaliseringsteknikkar er lite nytta.

Teknikkane er ikkje noko meir enn hjelpemiddel. Vurderingar må i dag likevel gjerast, trass i svakt grunnlag, og det er som eit ekstra verktøy her vi bør sjå bruk av optimaliseringsteknikkane. Eit interessant vidare arbeid ville vera å sjå på vidare detaljering av LP, gjerne bruk stokastiske modellar, og også prøve dynamisk programmering.

## 6. LITTERATUR

### 6.1 Referanser i teksten

- (1) ReVelle, C.S., Loucks, D.P. and Lynn, W.R.: Linear Programming Applied to Water Quality Management. Water Resources Research, Vol. 4, No1, Febr. 1968.
- (2) Streeter, H.W. og Phelps, E.B.: A study of the pollution and natural purification of the Ohio River. U.S. Public Health Bull. 146, February 1925.
- (3) Øren, Kjell: LP-analysis CEWA 558, Term paper. University of Washington, Seattle, March, 1979.
- (4) Tjomsland, Torulv: Spredningsstudier i elver. 0-78028, 0-81098, F-81431 NIVA 1982.
- (5) Lingsten, Lars: Numedalslågen: Vurdering av forurensningssituasjonen og forslag til minstevannføring. Notat 0-82089, NIVA 1982.
- (6) Hals, Brynjar m.fl: En registrering og teoretisk beregning av forurensningstilførsler til vassdrag i Buskerud fylke. 0-36/75, NIVA 1978.
- (7) Asplan A.S: Numedalslågen fase 1. Forberedende arbeid for vannbruksplanlegging. Februar 1981.
- (8) Johansen, Ole Jacob: Driftskostnader ved kloakkrensaneanlegg. Prosjektrapport 35. NTNFs Utvalg for drift av rensaneanlegg, Oslo 1982.
- (9) Skaugrud, Ø. og Berge, Dag: Rutineundersøkelse i Numedalslågen. Årsrapport for 1980. 0-80002-06, NIVA 1981.
- (10) Berge, Dag: Rutineovervåking i Numedalslågen 1981. 0-80002-06 NIVA 1982.
- (11) Hegna, H.: Brukerveiledning for datamaskinprogrammet LINE. Lineær programmering på NORD-10/NORD-100. EFI/ Norsk Regnesentral, 1980.

### 6.2 Andre aktuelle referanser

- (12) Liebman, J.C og Lynn, W.R.: The Optimal Allocation of Stream Dissolved Oxygen. Water Resources Research, Vol. 2, No. 3, 1966.
- (13) Haith, Douglas A.: Environmental Systems Optimization. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1982.
- (14) Arbabi, M. and Elzinga, J: A General Linear Approach to Stream Water Quality Modeling. Water Resources Research, Vol 11. No 2 April 1975.

V E D L E G G

```

*****
*                                     *
*                                     *
*           M P O S                   *
*                                     *
*           VERSION 3.2               *
*                                     *
* MULTI-PURPOSE OPTIMIZATION SYSTEM *
*                                     *
*****

```

PROBLEM NUMBER 1 \*\*\*\*\*

## TITLE

CEWA558

REGULAR

## VARIABLES

D1 TO D11

DS2 TO DS11

L1 TO L11

A1 TO A11

## MINIMIZE

.455A1 + .425A2 + .0419A3 + .451A4 + .061A5 + .114A6 + .431A7 + .352A8 +  
 .0485A9 + .0089A10 + .806A11

## CONSTRAINTS

L1 + 0.8779A1 = 2.8699

D1 - .0628L1 = 0.0252

L2 + 3.277A2 - .918L1 = 3.277

DS2 - 0.998D1 = .105

D2 - .204L2 - .478DS2 = 0.

L3 + .13A3 - .705L2 = .18

DS3 - .998D2 = .014

D3 - .034L3 - .927DS3 = 0.

L4 + .569A4 - .960L3 = .569

DS4 - .995D3 = .043

D4 - .090L4 - .8DS4 = 0.

L5 + .465A5 - .895L4 = .465

DS5 - .995D4 = .046

D5 - .31L5 - .978DS5 = 0.

L6 + .576A6 - .984L5 = .576

DS6 - .998D5 = .022

D6 - .226L6 - .504DS6 = 0.

L7 + .26A7 - .674L6 = .26

DS7 - .996D6 = .036

D7 - .033L7 - .952DS7 = 0.

L8 + 4.076A8 - .958L7 = 4.076

DS8 - .990D7 = .091

D8 - .283L8 - .45DS8 = 0.

L9 + 1.44A9 - .585L8 = 1.44

DS9 - .999D8 = .009

D9 - .27L9 - .83DS9 = 0.

L10 + .181A10 - .483L9 = .181

DS10 - D9 = 0.

D10 - .123L10 - .863DS10 = 0.

L11 + 1.483A11 - .685L10 = 1.483

DS11 - .991D10 = .081

D11 - .719L11 - .931DS11 = 0.

MPOS VERSION 3.2

33.	D1	.GE.	0.
34.	D2	.GE.	0.
35.	D3	.GE.	0.
36.	D4	.GE.	0.
37.	D5	.GE.	0.
38.	D6	.GE.	0.
39.	D7	.GE.	0.
40.	D7	.GE.	0.
41.	D8	.GE.	0.
42.	D9	.GE.	0.
43.	D10	.GE.	0.
44.	D11	.GE.	0.
45.	A1	.GE.	0.67
46.	A2	.GE.	.10
47.	A3	.GE.	0.
48.	A4	.GE.	.2
49.	A5	.GE.	.17
50.	A6	.GE.	0.
51.	A7	.GE.	0.
52.	A8	.GE.	.10
53.	A9	.GE.	0.
54.	A10	.GE.	.10
55.	A11	.GE.	0.
56.	A1	.LE.	.90
57.	A2	.LE.	.90
58.	A3	.LE.	.90
59.	A4	.LE.	.90
60.	A5	.LE.	.90
61.	A6	.LE.	.90
62.	A7	.LE.	.90
63.	A8	.LE.	.90
64.	A9	.LE.	.90
65.	A10	.LE.	.90
66.	A11	.LE.	.90
67.	DS2	.LE.	1.06
68.	DS3	.LE.	1.06
69.	DS4	.LE.	1.16
70.	DS5	.LE.	1.16
71.	DS6	.LE.	1.16
72.	DS7	.LE.	1.16
73.	DS8	.LE.	2.7
74.	DS9	.LE.	2.7
75.	DS10	.LE.	2.7
76.	DS11	.LE.	4.7
77.	D1	.LE.	.75
78.	D2	.LE.	1.06
79.	D3	.LE.	1.06
80.	D4	.LE.	1.16
81.	D5	.LE.	1.16
82.	D6	.LE.	1.16
83.	D7	.LE.	1.16
84.	D8	.LE.	2.7
85.	D9	.LE.	2.7
86.	D10	.LE.	2.7
87.	D11	.LE.	4.7

Non-negativity  
constraint

No treatment less than  
current level

Max 90% BOD<sub>5</sub>-removal

limits on starting deficit values  
(after mixing) for each  
reach, equal to the  
actual limit for the  
reach

limits on deficit values  
in each reach.

TOLERANCE 1.E-3  
RNGOBJ